*Jurnal Teknologi Informasi dan Komunikasi Cahaya Surya Kediri*

6

# CAHAYA*tech*




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| CAHAYA*tech* | Volume 01<br>Nomor 01 | Halaman<br>01 - 63 | Kediri,<br>September<br>2012 | ISSN<br>2302 - 2426 |

Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat (LPPM)

**STT Cahaya Surya Kediri**

Kampus 1 : Jl. Kyai Mojo No.23 Kediri, Telp. (0354) 682029, 681759
Kampus 2 : Jl. Perintis Kemerdekaan No. 36 A Kediri, Telp. (0354) 689699
www.cahayasurya.ac.id

*Jurnal Teknologi Informasi dan Komunikasi STT Cahaya Surya Kediri*

# CAHAYA*tech*

ISSN 2302 – 2426



## DARI REDAKSI

Dengan memanjatkan Puji Syukur kehadirat Tuhan YME, redaksi dapat menyelesaikan proses penyuntingan naskah dan telah menerbitkan **CAHAYA*tech*** Jurnal Ilmiah Teknologi Informasi dan Komunikasi STT Cahaya Surya Kediri edisi Tahun 2012. Jurnal **CAHAYA*tech*** ini merupakan wadah hasil penelitian dan kajian para dosen dan peneliti dari dalam maupun luar STT Cahaya Surya yang peduli terhada perkembangan wawasan bidang akuntansi dan manajemen.

Pada kesempatan ini redaksi mengucapkan terimakasih kepada para pengirim naskah jurnal **CAHAYA*tech*** yang telah menyumbangkan hasil penelitian/ pemikiran/ konsep/ ide di bidang Teknologi Informasi dan Komunikasi dan juga mohon maaf bagi pengirim naskah yang belum diterbitkan oleh redaksi dikarenakan banyaknya naskah yang telah masuk ke meja redaksi.

Akhir kata, semoga naskah-naskah jurnal **CAHAYA*tech*** Vol. 01 No. 01 ini dapat bermanfaat bagi perkembangan Teknologi Informasi dan Komunikasi di Indonesia.

Redaksi

## TURUNAN-TURUNAN DARI FUNGSI-FUNGSI ANALITIK

Oleh :

Budiono

ABSTRACT

*We are new ready to prove that if a function is analytic at a point, its derivations of all orders exist at that point and are themselves analytic there. A function $f$ of the complex variable $z$ is analytic at a point $z_o$ if its derivative exists not only at $z_o$ but also at each point $z$ in some neighborhood of $z_o$ .*

## PENDAHULUAN

Suatu fungsi kompleks f(z) dikatakan analitik pada $z_0$, bila turunan dari f ada pada $z_0$ dan juga pada lengkungan dari $z_0$. Jadi bila f analitik pada $z_0$, maka f analitik pada setiap titik dalam lengkungan tadi. Suatu fungsi dikatakan analitik pada daerah R, bila f analitik pada setiap titik dalam R. kadang kadang disebut holomorphic (Churchill,1984).

Bila z analitik pada daerah R, maka setiap titik z dalam R harus merupakan titik dalam dari domain definisi R, karena titik tadi mempunyai lingkungan. Jadi biasanya fungsi f terdefinisi pada suatu domain, sehingga bila suatu fungsi terdefinisi pada suatu cakram tertutup, $|z| \leq 1$ misalnya, maka yang dimaksud disini adalah bahwa f analitik pada suatu domain yang mengandung cakram tersebut (Snider, 2002).

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa bila fungsi f analitik pada suatu titik, maka semua turunan-turunan dari f pada titik tersebut ada dan analitik. Misal f analitik dalam dan pada kontour C yang sederhana dan tertutup dan z titik didalam C. Misal S titik – titik pada C dan dengan menggunakan rumus integral cauchy didapat :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(s)\ \ ds}{s-z} \ldots\ldots..(1)$$

Akan dibuktikan bahwa turunan dari f pada z

ada dan bentuk integralnya:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(s)\ \ ds}{(s-z)^2} \ldots\ldots..(2)$$

Disini (2) didapat dengan menggunakan integral dari (1) terhadap z. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\Pi i}\int_c \left(\frac{1}{s-z-\Delta z} - \frac{1}{s-z}\right)$$

$$\frac{f(s)}{\Delta z}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\Pi i}\int_c \frac{f(s)ds}{(s-z-\Delta z)(s-z)}$$

bila $0<|\Delta z|<d$, d adalah jarak terdekat dari z pada titik s pada c. Untuk itu digunakan sifat f adalah kontinu pada c untuk menunjukkan bahwa nilai integral dikarenakan menuju ke

$$\frac{1}{2\Pi i}\int \frac{f(s)}{(s-z)^2}\,dz, \text{ bila } \Delta z \to 0$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$\int_c \left[\frac{1}{(s-z-\Delta z)(s-z)} - \frac{1}{(s-z)^2}\right] f(s)ds$$

$$= \Delta z \int \frac{f(s)ds}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2}$$

Misalkan M adalah nilai maksimum dari $|f(s)|$ pada c dan L panjang dari C. Karena $|s-z| \geq d$ dan $|s-z-\Delta z| \geq |s-z|-|\Delta z| \geq d-|\Delta z|$, dapat

$$\Delta z\int_c \frac{f(s)\,ds}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2}| \leq \quad \frac{|\Delta z|ML}{(d-|\Delta z|d^2}$$

dan bentuk terakhir ini akan menuju 0, bila $\Delta z$

$\to 0$. Jadi

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\Pi i}\int_c \frac{f(s)ds}{(s-z)^2}$$

dan (2) terbukti. Bila digunakan cara yang sama

pada (2), maka didapat :

$$f^{"}(z) = \frac{1}{\Pi i} \int_c \frac{f(s)ds}{(s-z)^3} \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Lebih tepatnya bila $0<|\Delta z|<d$

$$\frac{f^1(z+\Delta z)-f^1(z)}{\Delta z} =$$

$$\frac{1}{2\Pi i}\int_c \left[\frac{1}{(s-z-\Delta z)^2} - \frac{1}{(s-z)^2}\right]\frac{f(s)}{\Delta z}ds$$

$$= \frac{1}{2\Pi i}\int_c - \frac{2(s-z)-\Delta z}{(s-z-\Delta z)^2\,(s-z)^2} f(s)ds$$

dan karena f kontinu pada c, nilai dari integral

$$\int_c \left[\frac{2(s-z)-\Delta z}{(s-z-\Delta z)^2(s-z)^2} - \frac{2}{(s-z)^2}\right] f(s)ds$$

$$= \int_c \frac{3(s-z)\Delta z\, 2(\Delta z)^2}{(s-z-\Delta z)^2(s-z)^3} f(s)ds$$

akan menuju 0, bila $\Delta z$ menuju 0

Persamaan (3) menunjukkan adanya turunan kedua dari f pada setiap titik z didalam c. Jadi bila f analitik pada suatu titik, maka $f^1$ juga analitik para titik tersebut. Misal w= $f(z) = (1+z)(1-z)^{-1}$, maka $f'(z) = [(1-z)(1)-(1+z)(-1)](1-z)^{-2} = 2(1-z)^{-2}$, fungsi tersebut analitik dimana-mana kecuali di z=1, dimana turunan tersebut tidak ada ; yakni fungsi tersebut tidak analitik di z=1. Didalam aerodinamika dan mekanika fluida, fungsi U(x,y) dan V(x,y) didalam f(z)=U(x,y) + iV(x,y) , dimana f(z) analitik , berturut –turut dinamakan potensial kecepatan dan fungsi arus. Fungsi analitik lain adalah fungsi harmonik .Suatu fungsi riil h(x,y) disebut harmonik pada domain pada bidang xy, bila pada setiap titik (x,y) pada domain tersebut h mempunyai turunan parsial yang kontinu untuk tingkat pertama dan kedua serta memenuhi persamaan deferensial parsial Laplace.

$H_{xx}(x,y) + h_{yy}(x,y) = 0$ .......... (1)

Bila f analitik pada D, maka turunan parsial yang pertamanya akan memenuhi persamaan Conechs Riemann :

$U_x=V_y$ $U_y = - V_x$ ................ (2)

Bila kedua persamaan diturunkan terhadap variabel x, didapat :

$U_{xx}=V_{yx}$ $U_{yx}=-V_{xx}$ .......... (3)

Demikian pula penurunan terhadap variabel y memberikan

$U_{xy} = V_{yy}$ $U_{yy} = - V_{xy}$

Menurut teorema-teorema pada kalkulus lanjutan, bila turunan-turunan parsial kontinu, maka hal ini akan menjamin $U_{yx} = U_{xy}$ dan $V_{yx}=V_{xy}$. Jadi dari persamaan (3) dan (4) didapat :

$U_{xx}(x,y)+U_{yy}(x,y)=0$ dan

$V_{xx}(x,y) + V_{yy}(x,y) =0$

Jadi bila fungsi f(z)=U(x,y)+ i V(x,y) analitik pada domain D, fungsi-fungsi komponen U dan V adalah harmonik pada D (Kaplan, 1984)

## TEOREMA- TEOREMA

**Teorema A.** (Churchill, 1984)

Bila fungsi f analitik pada suatu titik, maka semua turunan – turunannya untuk tiap tingkat adalah analitik pada titik tersebut.

Bukti :

Bila fungsi f(z) = u(x,y) + *i* v(x,y) adalah analitik pada titik z= (x,y), maka karena f' analitik, maka f' kontinu pada titik tersebut.

Kemudian karena $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$

Maka didapat turunan-turunan parsial dari u dan v untuk tiap tingkat kontinu pada titik dimana f analitik.

$f''(z) = u_{xx}(x,y) + i\,v_{xx}(x,y) =$

$v_{yx}(x,y) - iu_{yx}(x,y)$ , dan seterusnya.

Bila $f^{(0)}(z)$ adalah f(z) dan 0! = 1, maka dapat digunakan induksi matematika untuk membuktikan rumus

$$f^{(n)}(z) = \frac{n}{2\eta i}!\int_c \frac{f(s)\,ds}{(s-z)^{n+1}}, (n = 0,1,2,.(4)$$

Bila n = 0, maka didapat rumus Integral Conechs. Bila rumus benar untuk, bilangan bulat tidak negatif n=m, maka dapat dilanjutkan untuk n=m +1 seperti pada saat (2) bentuk menjadi (3) dan seterusnya.

**Teorema B.**

Misal C adalah kontour sederhana yang tertutup dan $C_j$ (j=1,2,...n) adalah sejumlah hingga kontour-kontour sederhana tertutup didalam C, sehingga daerah-daerah didalam $C_j$ masing-masing tidak mempunyai titik-titik yang sama. Misal R daerah tertentu yang terdiri dari titik-titik dalam C. $C_j$ – B adalah batas dari R yang terdiri dari C dan setiap Contour $C_j$, sehingga titik dalam R terletak disebelah kiri R. Bila f analitik pada R, maka $\int_c f(z)\,\mathrm{dz} = 0$ .......... (5)

Bukti :

Misal path poligonal $L_1$ terdiri dari sejumlah berhingga segmen garis yang dihubungkan ujung-ujungnya yang menghubungkan kontour C dengan kontour dalam $C_1$. Selain itu misal path poligonal $L_2$ menghubungkan $C_1$ dengan $C_2$ dan seterusnya terbukti $L_{n+1}$ yang menghubungkan $C_n$ dengan C, maka dapat dibentuk dua kontour tertutup yang sederhana $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ yang masing-masing mengandung path poligonal $L_j$ serta potongan-potongan dari C dan $C_j$ serta masing-masing berorientasi sehingga titik-titik dalam $\Gamma_1$ dan $\Gamma_2$ berada disebelah kiri. Karena integral pada $L_j$ dilakukan dua kali dalam arah berlawanan, maka jika dijumlahkan sama dengan 0.

**Teorema C.** (Churchill, 1984)

Bila f analitik dan tidak konstan pada domain, maka $|f(z)|$ tidak mempunyai nilai maksimum dalam domain tersebut. Jadi tidak ada $z_0$ dalam domain tersebut $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, z dalam domain......(6)

Bukti :

Untuk membuktikan ini diperlukan dalil bantu yang berbunyi : Bila f tidak konstan pada domain D, maka fungsi tersebut tidak konstan pada lingkungan $|z-z_0| < \in$ dalam D.

Jika f konstan pada $|z-z_0| < \in$ atau bila fungsi f analitik dan tidak konstan pada lingkungan dari $z_0$, maka ada paling sedikit 1 titik dalam lingkungan z

$\ni |f(z)| > |f(z_0)|$ ............. (7)

Misalkan $|f(z)|$ mempunyai nilai maksimum pada titik $z_0$ dalam D, maka $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ untuk setiap z dalam lingkungan $|z-z_0| < \varepsilon$ yang termasuk dalam D. Tetap hal ini bertentangan dengan (7), karena f analitik dan tidak konstan dalam lingkungan tersebut. Jadi terbukti.Bila fungsi f analitik pada tiap titik dalam suatu daerah yang tertutup dan terbatas, maka f kontunu pada R. Bila modulus $|f(z)|$ mempunyai nilai maksimum dalam R, maka ada bilangan M≥0 sehingga $f(z) \leq M$ , untuk setiap z anggota R. Tetapi

bila f kontinu pada daerah R yang tertutup dan terbatas serta f analitik dalam R dan bukan kontanta, maka modulus $|f(z)|$ mencapai nilai

maksimumnya pada batas-batas R dan bukan pada titik dalamnya

**DAFTAR PUSTAKA**


Churchill. R.V., Brohen, J.W., 1984 Complex Variables and Applications, Mc Graw – Hill, Japan, 111–118.

Koplan, W., 1984, Advanced Calculus, 3d ed, Addison – Wesley Publishing Company, Inc.

Krezyg..J.G., 1971, Problem in Complex Variable Theory, american Elservier Publishing Company, Inc., New York.

Saff,E.,Snider, A.D, 2002, Fundamentals of Complex Analysis, Third Edition, Prentice Hall.